TRACÉ APPROCHÉ DE LA COURBE DE LA FONCTION D'EULER APPELÉE "FONCTION EXPONENTIELLE"

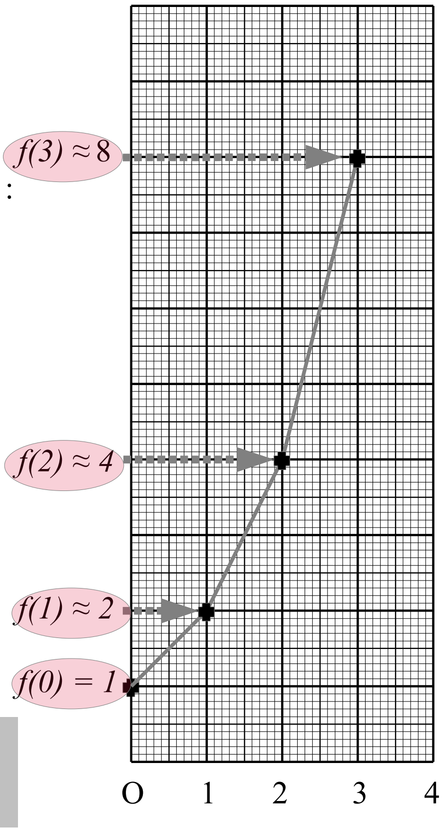
BUT

On cherche à obtenir une courbe de la fonction f qui a la propriété suivante : $\boxed{f'(x)=f(x)}$ et $\boxed{f(0)=1}$

On admet que :

- Une telle fonction existe ;
- On ne peut pas la trouver en utilisant les fonctions usuelles (polynômes, racines carrées...).

MÉTHODE D'EULER - LE PRINCIPE



Cette méthode consiste à obtenir une courbe approximative à l'aide des nombres dérivés de la fonction.

- Voici comment obtenir les premiers points en remplaçant la courbe par des segments de droites sur des intervalles d'amplitude égale à 1 :

1ère étape :

car $f'(x) = f(x)$

On trace la tangente à la courbe en $a = 0$ de coefficient $f'(0)=f(0)=1$ donc d'équation : $y = f'(0)(x - 0)+f(0) = x+1$

2ème étape :

On utilise la portion de tangente déjà tracée pour obtenir une valeur approximative de $f(1)$:
Calculée avec l'équation de la droite $y=x+1$, on obtient : $f(1) \approx 1+1 = 2$

car $f'(x) = f(x)$

Puis on recommence à partir de l'abscisse $a = 1$, $f'(1)= f(1) \approx 2$
donc l'équation de la droite est $y = f'(1)(x - 1)+f(1) = 2x+0$ *etc......*

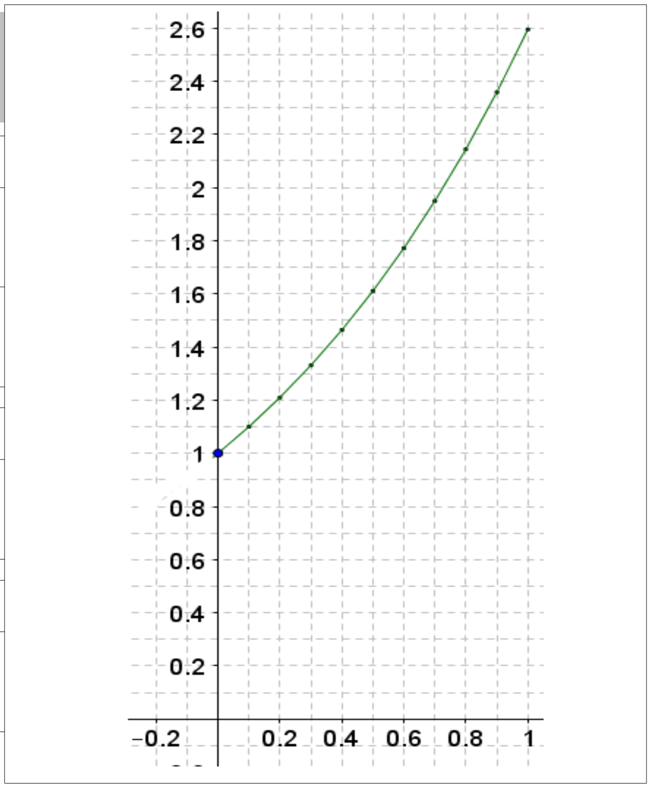
Bien sur , les valeurs obtenues sont très loin des valeurs exactes de la fonction ! Pour gagner en précision , il faut déterminer un plus grand nombre de points plus rapprochés les uns des autres.

On obtient une meilleure précision avec des points plus rapprochées en prenant par exemple des intervalles d'amplitude égale à 0,1 :

Valeur de a	0	0,1
Équation de la tangente en a	$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ $y=x+1$	$y=f'(0,1)(x-0,1)+f(0,1)$ $y=1,1(x-0,1)+1,1$
Valeur approchée de $f(a+0,1)$	$f(0,1)\approx 0,1+1=1,1$	$f(0,2)\approx 1,1\times 0,1+1,1=1,21$

Valeur de a	0,2	0,3	0,4	0,5
Valeur approchée de $f(a+0,1)$	$y=f'(0,2)(x-0,2)+f(0,2)$ $y\approx f(0,2)(x-0,2)+f(0,2)$ $y\approx 1,21(x-0,2)+1,21$ $f(0,3)\approx 1,21\times 0,1+1,21=1,331$	$y=f'(0,3)(x-0,3)+f(0,3)$ $y\approx f(0,3)(x-0,3)+f(0,3)$ $y\approx 1,331(x-0,3)+1,331$ $f(0,4)\approx 1,331\times 0,1+1,331=1,4641$	$f(0,5)\approx 1,4641\times 0,1+1,4641$ $=1,61051$	$f(0,6)\approx f(0,5)\times 1,1$ $=1,77156$

Valeur de a	0,6	0,7	0,8	0,9
Valeur approchée de $f(a+0,1)$	$f(0,7)\approx f(0,6)\times 1,1$ $=1,94872$	$f(0,8)\approx f(0,7)\times 1,1$ $=2,14359$	$f(0,9)\approx f(0,8)\times 1,1$ $=2,35795$	$f(1)\approx f(0,9)\times 1,1$ $=2,59374$



CONSTRUIRE AVEC LE TABLEUR GEOGEBRA

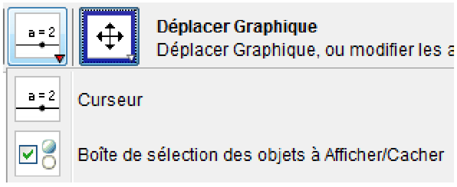
Avec Géogebra installé sur LORDI-REGION ou sur https://www.geogebra.org/classic

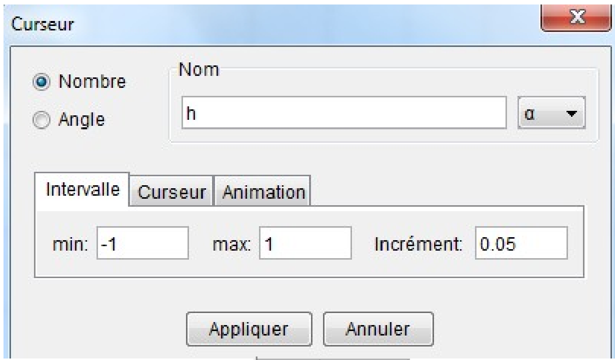
Pour réaliser un le tracé avec Géogebra, on peut créer un pas h qui sera réglable et utiliser de manière répétée dans un tableur, l'approximation : $f(a+h)\approx f(a)(1+h)$ où a et h réels.

En effet, avec la propriété de la fonction exponentielle $f'(a)=f(a)$ *; donc lorsque nous calculons chaque nouvelle image avec l'équation de tangente* $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ *où nous remplaçons* $x=a+h$ *et* $f(a+h)\approx y$ *; il vient* $f(a+h)\approx f(a)(a+h-a)+f(a)=f(a)(h+1)$

Lancer le logiciel GeoGebra

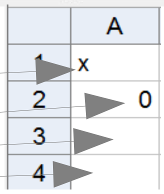
Insérer un Curseur h, variant de -1 à 1 avec un pas de 0,05



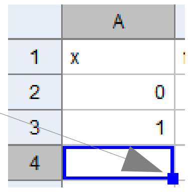


Colonne A

Afficher le Tableur de GeoGebra (Affichage → Tableur)



1. Entrer dans la cellule A1 **"x"** *(avec des guillemets)*
   La première valeur de x est 0, entrer **=0** dans la cellule A2
   La valeur de x suivante est **=0+h** , dans la cellule A3
   Écrire la formule **=A3+h** dans **A4**
   *(le tableur va utiliser le **h** déjà définie par le curseur dans la zone de Graphique : vous pouvez donc faire varier **h** !!)*



2. Compléter la colonne A jusqu'à A40 en tirant l'angle de la cellule **A4** vers le bas :

Colonne B

1. Entrer dans la cellule **B1** "f(x)" *(avec les guillemets)*
   $f(0)=1$ donc entrer la valeur 1 dans la cellule **B2**
2. Avec $f(a+h)\approx f(a)(1+h)$ pour $a\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$

   Lorsque $a=0$, on obtient $f(0+h)\approx f(0)(1+h)$.

   Compléter la cellule **B3** par la formule dépendant de **B2** et de **h** : **B3** = ...
3. Écrire **B4** en fonction de **B3 et de h : B4** = ...
4. Compléter la colonne B jusqu'à B40 en tirant l'angle de la cellule **B4** vers le bas.

Colonne C

1. Dans la cellule C3, écrire la formule

   =Segment[(A2,B2),(A3,B3)]

   Tirer la formule jusqu'à C40

	A	B	C
1	x	f(x)	
2	0	1	
3	1	2	1.41
4	2	4	2.24
5	3	8	4.12
6	4	16	8.06
7	5	32	16.03

2. Enlever la fenêtre Tableur (Affichage → Tableur) et faites varier la valeur de h avec le curseur.

   On remarque que quand h est proche de 0, notre approximation semble tracer une courbe.
   Cette fonction sera appelée **fonction exponentielle.**

3. Entrer dans la barre de saisie : f(x)=exp(x)