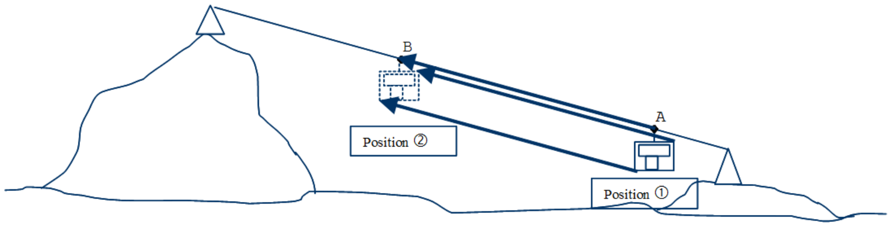
1. Translation

- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont la **même direction**
- Il y a deux **sens** de parcours sur une droite : de A vers B ou bien de B vers A

Sur le dessin ci-contre, un téléphérique passe de la position ① à la position ②, en se déplaçant suivant la **direction** du câble qui le soutient, dans le **sens** qui le fera monter et de la **distance** qui sépare les deux positions.



La position ② constitue une image de la position ① après un "glissement" pendant un certain temps.

Le glissement a été effectué :

- suivant la **direction** de la droite (AB)
- dans le **sens** A vers B, que l'on indique par la flèche
- d'une **longueur** égale à AB.

On dit que le dessin en position ② est l'image du dessin en position ① par la translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$

2. Définition : vecteurs

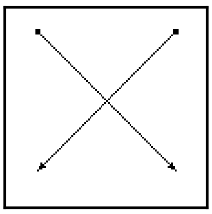
Définition et vocabulaire

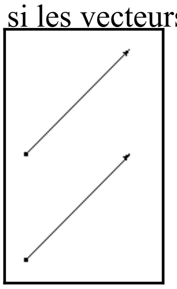
Un **vecteur** $\vec{u}$ est un objet mathématique défini par une **direction**, un **sens** et une **longueur**. On le représente par une flèche et il caractérise une translation.
Si on représente cette flèche à partir d'un point A et qu'on note B son extrémité, alors :
• La **direction** du vecteur $\vec{u}$ est celle de la droite (AB),
• Le **sens** du vecteur $\vec{u}$ est le sens de l'origine A vers l'extrémité B,
• La **longueur** du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB du segment $[AB]$.

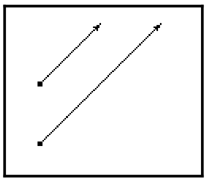
Remarque

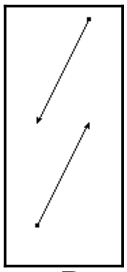
La longueur du vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée la **norme** de $\vec{u}$ et est notée $\|\vec{u}\|$

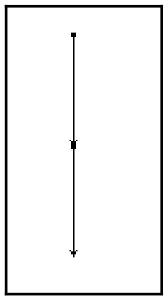
Exercice 2.1
Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont égaux. **Justifier les réponses**


A


B


C

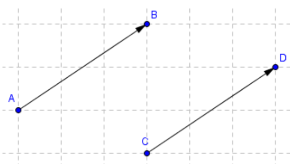

D


E

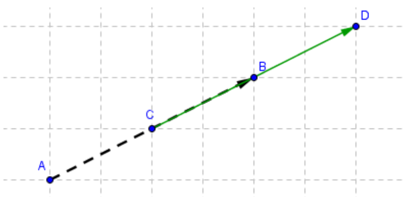
3. Égalité de deux vecteurs

Propriété

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que l'une des trois propositions suivantes est vérifiée :

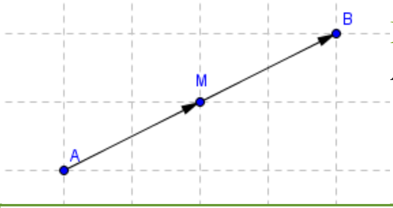


a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, sens et longueur
b. La translation qui transforme A en B transforme aussi C en D
c. Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;



Conséquence

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu
- Réciproquement, si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$)



Milieu d'un segment

A et B désignent deux points distincts.

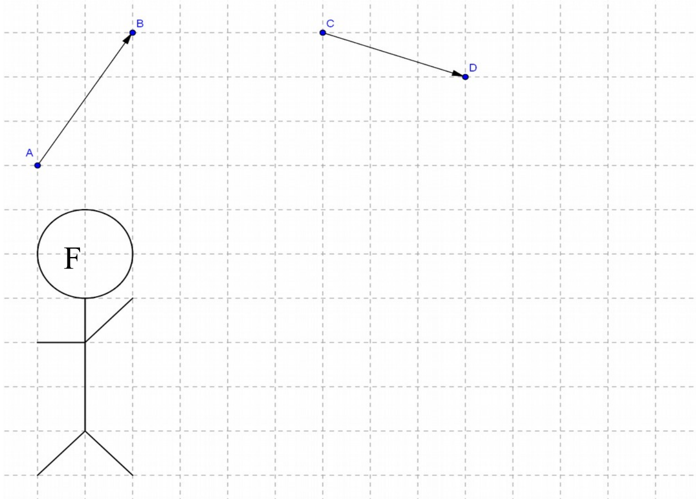
- Si M est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$
- Réciproquement, si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, alors M est le milieu de [AB]

Exercice 3.1
ABDC est un parallélogramme, E est le symétrique de A par rapport à C. Démontrer que BDEC est un parallélogramme **en utilisant des égalités de vecteurs.**

4. Somme de deux vecteurs

Exercice 4.1
Construire l'image F ' de la figure F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis l'image F ' ' de la figure F' par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Par quelle transformation peut-on passer directement de la figure de départ F à la figure d'arrivée F ' ' ?



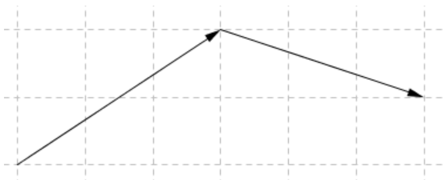
Définition

A, B et C étant trois points du plan, réaliser la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ donne la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

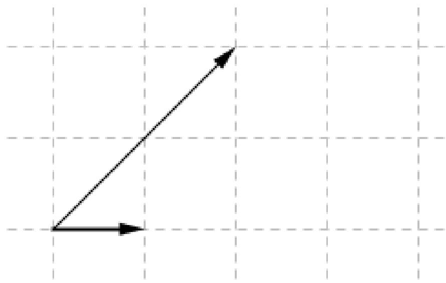
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la **somme des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On note : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ Cette relation est appelée **relation de Chasles**

Construction de la somme de deux vecteurs :

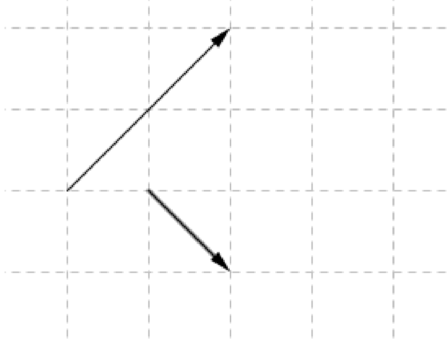
L'extrémité de l'un est aussi l'origine de l'autre (ce qui correspond à la propriété).



Les deux vecteurs ont même origine.



Cas général.



Exercice 4.2
ABC est un triangle.
a. Dans chaque cas, donner un représentant de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
b. Construire le représentant d'origine A de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ puis le représentant d'origine C de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
c. Construire le représentant d'origine A de $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Exercice 4.3
Compléter les pointillés pour que l'égalité soit vraie :
$\overrightarrow{IJ}+\ldots=\overrightarrow{IE}$ $\ldots+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}$ $\ldots+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{RA}$ $\overrightarrow{AB}+\ldots=\overrightarrow{AA}$

Vecteurs particuliers

- $\vec{u}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=$... est appelé le vecteur nul et est noté $\vec{0}$
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on notera $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$,

(d'ailleurs, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \vec{0}$)

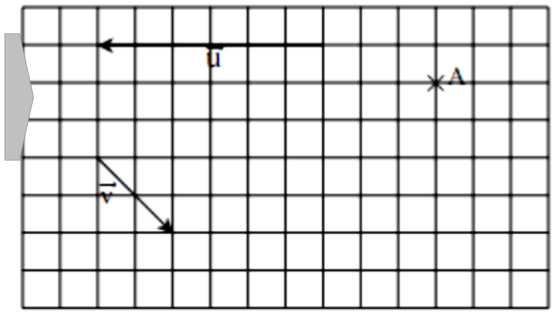
Remarque

On pourra écrire des soustractions d'un vecteur par un autre ; il suffira de lui ajouter son opposé !

Exemple : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

Exercice 4.4

Construire en rouge le vecteur d'origine A égal à la somme $\vec{u}+\vec{v}$ et en vert le vecteur d'origine A égal à $\vec{u}-\vec{v}$



Exercice 4.5

A, B, C, D sont quatre points. Démontrer que :

a. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

b. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{DA}$

c. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Vidéo Maths

5. Produit d'un vecteur par un réel

Exemple

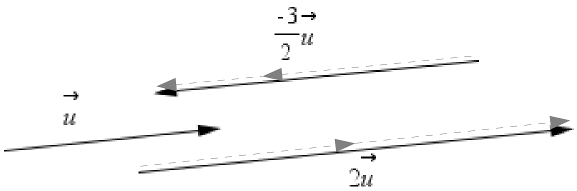
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul

On définit le vecteur $2\vec{u}$ de la façon suivante :

- sa longueur est celle de $\vec{u}$ multipliée par 2
- il a la même direction que $\vec{u}$
- il a le même sens que $\vec{u}$ (car 2 est positif)

On définit le vecteur $\frac{-3}{2}\vec{u}$ de la façon suivante :

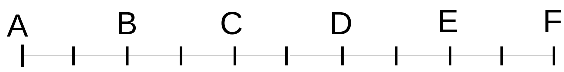
- sa longueur est celle de $\vec{u}$ multipliée par $\frac{3}{2}$
- il a la même direction que $\vec{u}$
- Son sens est opposé à celui de $\vec{u}$ (car $\frac{-3}{2}<0$)



Exemple

A, B, C, D, E et F sont alignés et régulièrement espacés dans cet ordre. Compléter

$\overrightarrow{AD}=...\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}=...\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CF}=...\overrightarrow{ED}$.



Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et quels que soient les réels x et y :

- $1\vec{u}=\vec{u}$, $x\vec{0}=\vec{0}$ et $0\vec{u}=\vec{0}$.
- $x(y\vec{u})=(xy)\vec{u}$.
- $(x+y)\vec{u}=x\vec{u}+y\vec{u}$
- $x(\vec{u}+\vec{v})=x\vec{u}+x\vec{v}$

Exercice 5.1

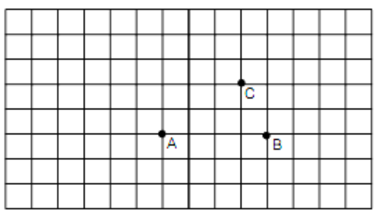
ABC est un triangle. Les points N et P sont tels que :

$\overrightarrow{AN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

Reproduire la figure ci-contre et placer les points N et P

Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$

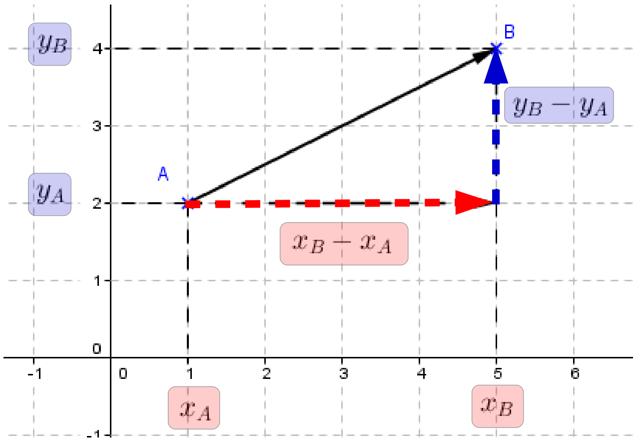
En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AN}=k\,\overrightarrow{AP}$



Vidéo Maths

6. Les coordonnées de vecteurs – Un outil pour démontrer

Coordonnées d'un vecteur



Dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$, alors :

le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$:

Ces coordonnées correspondent au déplacement selon la direction de l'axe des abscisses puis selon la direction de l'axe des ordonnées pour aller de A à B (déplacement affecté de signe).

Une nouvelle méthode pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Exercice 6.1
Dans un repère (O, I, J), on donne $A(-3 ; 1)$, $B(4 ; -2)$, $C(-2 ; 4)$ et $D(5 ; 1)$.

Vidéo Maths

Vidéo Maths

a. Placer les points dans un repère et lire graphiquement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

b. Quelle conjecture peut-on faire à partir de cette représentation ?

c. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

d. Que permet de démontrer la question **c.** ?

Coordonnées de la somme de deux vecteurs

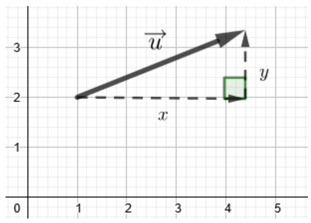
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) Soit $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs.

Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées le couple $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre

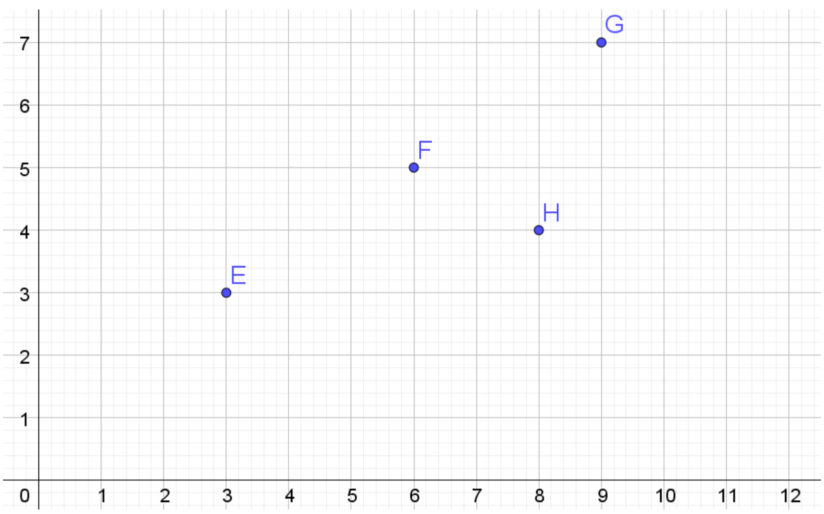
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J)
Soit $\vec{u}(x ; y)$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées le couple $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$



Calcul de la norme d'un vecteur :

Avec $\vec{u}(x ; y)$, on a la norme de $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Exercice 6.2

Vidéo Maths

Dans un repère orthonormé, on a placé les points $E(3 ; 3)$ $F(6 ; 5)$ $G(9 ; 7)$ et $H(8 ; 4)$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$, que peut-on en déduire ?

2. Calculer les coordonnées de K pour que $EFHK$ soit un parallélogramme.

3. Calculer $\|\overrightarrow{EF}\|$ et $\|\overrightarrow{FH}\|$. EFHK est-il un losange ?

4. Placer le point R tel que $\overrightarrow{ER} = 3\overrightarrow{EH} - 2\overrightarrow{HK}$